

ЕГЭ: Профильная математика

Minecraft Edition

Часть 1

- 1) Стив разместил на пьедестале в виде алмазной пирамиды высотой 4 блока полностью заряженный маяк – блок, в заряженном состоянии пускающий ровный луч света вверх до бесконечности. Затем он оградил маяк со всех сторон стеной высотой 10 блоков над маяком и отошёл от блока маяка на k блоков, причём его ноги по высоте сравнялись с самым нижним уровнем пьедестала. Находясь на этом расстоянии, он начинает видеть луч маяка под углом в 45° к горизонту. Найдите k .
- 2) Стив бежит вокруг скелета, который попутно в него стреляет, стоя на месте. Сначала скелет выстреливает в игрока стрелой, имеющей вектор направления $(3; 0; 4)$, а через несколько секунд скелет снова стреляет в игрока стрелой, имеющей вектор $(8; 0; -6)$. На сколько градусов Стив повернул скелета между двумя выстрелами?
- 3) Алекс на плоской поверхности построила прямой параллелепипед из гравия длиной и шириной 20 блоков и высотой 50 блоков. Затем она полностью вскопала его, получив вместо 60% гравия кремений, так как копала лопатой с зачарованием “Удача”. Из того, что осталось, она построила большой куб. Найдите площадь поверхности полученного куба. Ответ выразите в метрах квадратных, учитывая, что сторона 1 блока = 1 м.
- 4) Яйцо дракона при прикосновении телепортируется в случайное доступное место на расстоянии в 15 блоков от себя по осям X и Z (доступная область образует квадрат без настоящего положения яйца). Найдите вероятность того, что при прикосновении оно переместится на расстояние не более 8 блоков от себя.
- 5) Стив разместил три раздатчика вместительностью 9 предметов и заполнил каждый двумя зельями отравления и четырьмя зельями слепоты, а остальные места заполнил зельями регенерации. Раздатчик

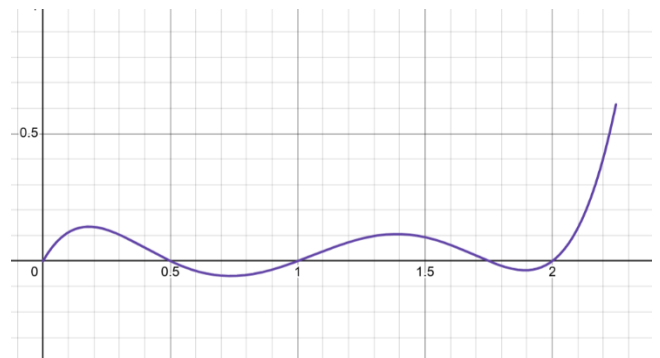
при активации выбирает случайный предмет из своего инвентаря и использует его, в случае с зельем он его выбросит. Стив по очереди активирует каждый раздатчик и получает эффект от выброшенного зелья. С какой вероятностью у него будут все три эффекта: слепота, регенерация и отравление? Ответ округлите до тысячных.

6) Алекс построила два куба со сторонами $(2x - 7)$ и $(x + 6)$ так, что кубы оказались равновеликими. Найдите x .

7) Стив поставил один двойной сундук и заполнил каждый слот сундука шалкерами, полностью заполненными золотыми блоками. Сколько в нём ресурсов, считая в золотых слитках, если известно, что:

- Один двойной сундук – как два обычных;
- В обычном сундуке 27 слотов, как и в шалкере;
- В каждом золотом блоке содержится 9 золотых слитков;
- В один слот шалкера можно положить 64 предмета;
- В шалкер нельзя положить другой шалкер, как и в сундук нельзя положить сундук.

8) На графике изображена производная $f'(x)$ функции $f(x)$ перемещения вагонетки по неравномерному участку рельс от времени, определенная на отрезке $[0; 2,25]$. Сколько раз вагонетка во время движения начинала замедляться?



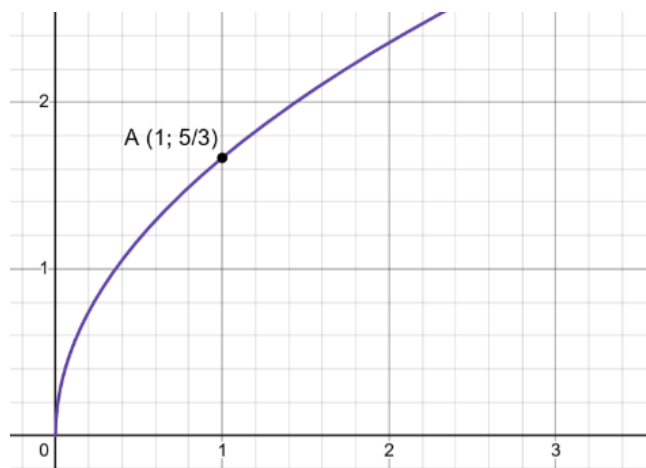
9) Стив со своими друзьями Алекс и Зури хочет посчитать, сколько у них вместе опыта в удельных единицах. Стив экспериментально доказал, что общее количество опыта игрока можно узнать, зная только уровень, с помощью следующей функции (где x – уровень игрока, а результат будет возвращен в удельных единицах):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 17x, & 1 \leq x \leq 15 \\ 1,5x^2 - 29,5x + 360, & 16 \leq x \leq 30 \\ 3,5x^2 - 151,5x + 2220, & x > 30 \end{cases}$$

Известно, что у Стива уровень опыта – 10, у Алекс – 20, а у Зури – 32. Найдите их общее количество опыта, ответ выразите в удельных единицах.

10) У пчелы А 8 пасек, у пчелы Б – в два раза меньше. У всех пчёл производительность пасек за секунду является некоторой константой. За сколько секунд они наполняют 1 пасеку, если пчеле А понадобится на 15 минут 12 секунд времени больше для заполнения всех своих пасек, чем пчеле Б?

11) Изучая зависимость высоты, на которую подпрыгивает игрок при падении на блок слизи, от разной изначальной высоты, Алекс заметила, что значение высоты подскока $\approx f(x) = k\sqrt{x}$ для маленьких x (до 15). На рисунке фиолетовым изображена $f(x)$. Найдите $f(9)$.



12) Высота полёта в метрах брошенного трезубца вдоль оси абсцисс зависит от времени t (в секундах), прошедшего после броска, от угла броска γ (в градусах), от начальной скорости v (метров в секунду) и вычисляется по закону: $h(t) = vt \sin \gamma - 5t^2$. Найдите максимальную высоту (в метрах), на которую поднимется трезубец относительно горизонта, если $v = 8\sqrt{2} \frac{6}{c}$, $\gamma = 45^\circ$.

Часть 2

13) Стив построил большой округлый (насколько это возможно) загон с высоким забором и захотел разделить его перегородками на некоторое количество круговых секторов с одинаковым образующим углом, чтобы в каждом секторе размножать отдельных животных.

а) Стив хочет найти такие углы γ , удовлетворяющие уравнению $\sin 2\gamma = \operatorname{tg} \gamma$. Помогите ему найти их всех.

б) Теперь помогите Стиву отобрать из всех углов $\gamma \in (0; 2\pi)$ только те, которые смогут разделить его загон на одинаковые круговые сектора.

14) Алекс построила полый (с нулевым освещением внутри) куб из туфа с толщиной стенок в 1 блок, причём концы одной из его диагоналей имеют координаты (10;10;10) и (111;111;111). При себе у неё есть неограниченный

Т	13	12	11	10	9	8	9	10	11	12	13	Т
13	12	11	10	9	8	9	8	9	10	11	12	13
12	11	10	9	8	9	10	9	8	9	10	11	12
11	10	9	8	9	10	11	10	9	8	9	10	11
10	9	8	9	10	11	12	11	10	9	8	9	10
9	8	9	10	11	12	13	12	11	10	9	8	9
8	9	10	11	12	13	Т	13	12	11	10	9	8

набор самых ярких прозрачных источников освещения уровнем света 15, которые освещают территорию вокруг себя (в виде октаэдра, если распространению света ничего не мешает) в радиусе 14 блоков: вдоль осей координат свет от источника уменьшается на один уровень света на каждый блок; по диагонали уменьшается на сумму расстояния вдоль каждой оси (На изображении показан пример распространения света от источника, буквами Т обозначены факела, имеющие уровень света 14, в нашем случае источник имеет уровень 15, следовательно он освещает свой блок на 15)

а) Алекс разместила в каждом углу внутренней полости куба по 1 источнику света. Докажите, что отношение объёмов освещенной и неосвещенной частей $< 0,01$ (освещенная = ненулевой уровень).

б) Фантомы в Minecraft спавнятся при освещении не более 7 уровней. У Алекс есть 5 источников освещения. Какое максимальное по объёму пространство, в котором не будут спавниться фантомы, можно осветить ими, если каждая из областей источников освещения не должна быть отделена от других неосвещенным пространством?

15) Зури построил квадрат со стороной n блоков из медных ламп, которые являются ячейками памяти – если их 1 раз активировать кнопкой, то они поменяют своё состояние: с потушенной на зажженую и наоборот. После того, как он поставил все лампы, он доставил еще 12,5% ламп дополнительно. Найдите все возможные n , если на итоговом полотне можно показать не более 2^{64} различных изображений.

16) Стив всё же построил свой округлый загон и начал размножать животных. Изначально у него было некоторое чётное количество взрослых коров, каждый день он попарно размножал взрослых особей, получая одну молодую особь с каждой пары, которая вырастет только на следующий день. Также начиная с третьего дня он убивал определенный процент взрослых коров для получения мяса и кожи. Распорядок дня такой: сначала дети вырастают, потом Стив размножает коров, затем убивает некоторый процент. Сколько у него изначально было взрослых коров, если в четвертый день у него оказалось 468 коров и суммарное количество убитых коров за 4 дня – 207?

17) Стив решил убить Дракона Энда. Для этого ему нужно найти крепость с помощью броска ок Энда, которые показывают направление крепости относительно игрока. Стив задумывается: “Можно ли найти крепость Края только с помощью двух ок?” Стив делает первый бросок на координатах (100; 400) и око летит под углом 45° к прямой, параллельной оси абсцисс. Затем Стив совершает второй бросок на координатах (200; –100) и око летит снова под углом 45° к прямой, параллельной оси абсцисс.

а) Докажите, что приведенных данных достаточно для вычисления координат крепости, и найдите координаты крепости.

б) Найдите расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника, вершинами которого являются крепость и две точки бросков.

18) Стив победил Дракона Энда и пошёл исследовать просторы Дальнего Энда. В одном из городов Энда он нашёл записку, в которой были написана одна из двух ключевых координат другого города Энда, а вторую координату предлагалось найти самому. Подсказкой было следующее:

“Ключ ко второй координате – значения параметра a , при которых решением совокупности неравенств

$$(x^4 - 5x^2 + 4) \cdot \sqrt{-a^2 - 3a} \leq 0 \text{ и}$$

$$(ax^2 - a - x^2 + 1) \cdot \sqrt{-a^2 + a + 6} \cdot \sqrt{9 - x^2} \geq 0$$

будет отрезок $[-3; 3]$. Считайте, что решения неравенств независят друг от друга (области определения неравенств в том числе) и в конце они лишь объединяются...”

Помогите Стиву найти вторую координату, ведь он – не математик, а вы – может быть!

19) Алекс построила квадратный сад для берёз размером 2500 на 2500 деревьев. Со одной стороны от каждого столбика и каждой строки сада она поставила таблички с какими-то числами, причем каждое из написанных чисел либо рациональное, либо иррациональное, а также и тех, и тех поровну. Затем она подписала каждое дерево в саду произведением чисел в соответствующем этому дереву столбце и строке.

а) Могут ли все деревья в саду быть подписаны рациональными числами, если все изначальные числа по бокам от столбцов и строк necessarily различны?

б) Могут ли все деревья в саду быть подписаны иррациональными числами, если все изначальные числа по бокам от столбцов и строк попарно различны?

в) Какое максимальное количество деревьев может быть подписано рациональными числами, если все изначальные числа по бокам от столбцов и строк попарно различны и среди них нет нулей?