

ЕГЭ: Профильная математика

Minecraft Edition

Решения задач

Часть 1

1) Стив разместил на пьедестале в виде алмазной пирамиды высотой 4 блока полностью заряженный маяк – блок, в заряженном состоянии пускающий ровный луч света вверх до бесконечности. Затем он оградил маяк со всех сторон стеной высотой 10 блоков над маяком и отошёл от блока маяка на k блоков, причём его ноги по высоте сравнялись с самым нижним уровнем пьедестала. Находясь на этом расстоянии, он начинает видеть луч маяка под углом в 45° к горизонту. Найдите k .

Ответ: 15

Решение: расстояние от блока под ногами игрока до луча маяка = высота пирамиды + блок маяка + высота стены = $4 + 1 + 10 = 15$ блоков. Получаем прямоугольный треугольник, в котором k – длина одного катета, 15 – длина второго, и острый угол 45° , следовательно $k = 15$.

2) Стив бежит вокруг скелета, который попутно в него стреляет, стоя на месте. Сначала скелет выстреливает в игрока стрелой, имеющей вектор направления $(3; 0; 4)$, а через несколько секунд скелет снова стреляет в игрока стрелой, имеющей вектор $(8; 0; -6)$. На сколько градусов Стив повернул скелета между двумя выстрелами?

Ответ: 90

Решение: скалярное произведение векторов = $3 * 8 + 4 * (-6) = 0$, следовательно угол между векторами равен 90° .

3) Алекс на плоской поверхности построила прямой параллелепипед из гравия длиной и шириной 20 блоков и высотой 50 блоков. Затем она полностью вскопала его, получив вместо 60% гравия кремний, так как копала лопатой с зачарованием “Удача”. Из того, что осталось, она построила большой куб. Найдите площадь поверхности полученного

куба. Ответ выразите в метрах квадратных, учитывая, что сторона 1 блока = 1 м.

Ответ: 2400

Решение: объем изначального параллелепипеда = $20 * 20 * 50 = 20000$ блоков. Затем он теряет 60% блоков, следовательно блоков будет $20000 * 0,4 = 8000$, следовательно сторона нового куба будет $\sqrt[3]{8000} = 20$. Остаётся найти площадь поверхности куба: $S = 6a^2 = 6 * 20 * 20 = 2400 \text{ м}^2$.

4) Яйцо дракона при прикосновении телепортируется в случайное доступное место на расстоянии в 15 блоков от себя по осям X и Z (доступная область образует квадрат без настоящего положения яйца). Найдите вероятность того, что при прикосновении оно переместится на расстояние не более 8 блоков от себя.

Ответ: 0,3

Решение: общее количество блоков, на которое способно переместиться яйцо = $(15 * 2 + 1)^2 - 1 = 960$. Благоприятных исходов = $(8 * 2 + 1)^2 - 1 = 288$. Получаем $P = \frac{288}{960} = 0,3$.

5) Стив разместил три раздатчика вместительностью 9 предметов и заполнил каждый двумя зельями отравления и четырьмя зельями слепоты, а остальные места заполнил зельями регенерации. Раздатчик при активации выбирает случайный предмет из своего инвентаря и использует его, в случае с зельем он его выбросит. Стив по очереди активирует каждый раздатчик и получает эффект от выброшенного зелья. С какой вероятностью у него будут все три эффекта: слепота, регенерация и отравление? Ответ округлите до тысячных.

Ответ: 0,198

Решение: искомая вероятность равна $3! * \frac{2}{9} * \frac{4}{9} * \frac{3}{9} = \frac{144}{729} = 0,1975308... \approx 0,198$. (3! – всевозможные перестановки случаев выпадения зельев, 2/9 – отравление, 4/9 – слепота, 3/9 - регенерация)

6) Алекс построила два куба со сторонами $(2x - 7)$ и $(x + 6)$ так, что кубы оказались равновеликими. Найдите x .

Ответ: 15

Решение: $(2x - 7)^3 = (x + 6)^3 \Leftrightarrow 2x - 7 = x + 6 \Leftrightarrow x = 15$

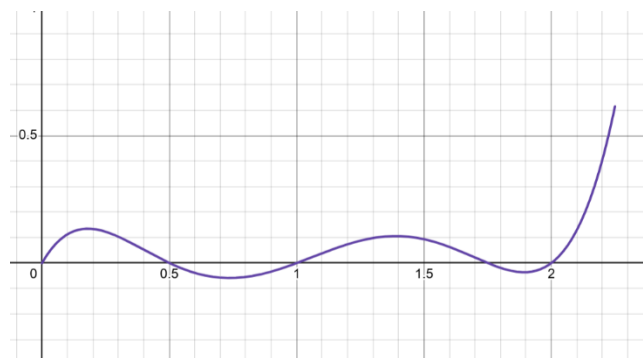
7) Стив поставил один двойной сундук и заполнил каждый слот сундука шалкерами, полностью заполненными золотыми блоками. Сколько в нём ресурсов, считая в золотых слитках, если известно, что:

- Один двойной сундук – как два обычных;
- В обычном сундуке 27 слотов, как и в шалкере;
- В каждом золотом блоке содержится 9 золотых слитков;
- В один слот шалкера можно положить 64 предмета;
- В шалкер нельзя положить другой шалкер, как и в сундук нельзя положить сундук.

Ответ: 787968

Решение: ресурсов в эквиваленте золотных слитков $2 * 27 * 27 * 64 * 9 = 787968$.

8) На графике изображена производная $f'(x)$ функции $f(x)$ перемещения вагонетки по неравномерному участку рельс от времени, определенная на отрезке $[0; 2,25]$. Сколько раз вагонетка во время движения начинала замедляться?



Ответ: 2

Решение: нам нужны точки, в которых $f'(x)$ меняет свой знак с “+” на “-”, таких точек здесь только две ($x = 0,5$ и $x = 1,75$)

9) Стив со своими друзьями Алекс и Зури хочет посчитать, сколько у них вместе опыта в удельных единицах. Стив экспериментально доказал, что общее количество опыта игрока можно узнать, зная только уровень, с помощью следующей функции (где x – уровень игрока, а результат будет возвращен в удельных единицах):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 17x, & 1 \leq x \leq 15 \\ 1,5x^2 - 29,5x + 360, & 16 \leq x \leq 30 \\ 3,5x^2 - 151,5x + 2220, & x > 30 \end{cases}$$

Известно, что у Стива уровень опыта – 10, у Алекс – 20, а у Зури – 32. Найдите их общее количество опыта, ответ выразите в удельных единицах.

Ответ: 1496

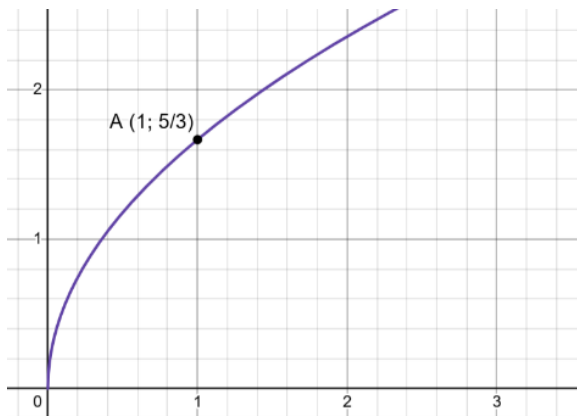
Решение: $f(10) = 170, f(20) = 1,5 * 20^2 - 29,5 * 20 + 360 = 370, f(32) = 3,5 * 32^2 - 151,5 * 32 + 2220 = 956, S = f(10) + f(20) + f(32) = 170 + 370 + 956 = 1496$ удельных единиц.

10) У пчелы А 8 пасек, у пчелы Б – в два раза меньше. У всех пчёл производительность пасек за секунду является некоторой константой. За сколько секунд они наполняют 1 пасеку, если пчеле А понадобится на 15 минут 12 секунд времени больше для заполнения всех своих пасек, чем пчеле Б?

Ответ: 228 (реальное значение из игры)

Решение: пусть x – производительность пчелы, тогда составляя табличку получаем уравнение $\frac{8}{x} - \frac{4}{x} = 912$, откуда $x = \frac{1}{228}$, однако это производительность, то есть сколько пасек производит пчела за 1 секунду, значит 1 пасеку каждая из них производит за 228 секунд.

11) Изучая зависимость высоты, на которую подпрыгивает игрок при падении на блок слизи, от разной изначальной высоты, Алекс заметила, что значение высоты подскока $\approx f(x) = k\sqrt{x}$ для маленьких x (до 15). На рисунке фиолетовым изображена $f(x)$. Найдите $f(9)$.



Ответ: 5

Решение: подставляя точку $(1; \frac{5}{3})$ получаем $k = \frac{5}{3}$. В итоге получаем $f(9) = \frac{5}{3}\sqrt{9} = 5$.

12) Высота полёта в метрах брошенного трезубца вдоль оси абсцисс зависит от времени t (в секундах), прошедшего после броска, от угла броска γ (в градусах), от начальной скорости v (метров в секунду) и вычисляется по закону: $h(t) = vt \sin \gamma - 5t^2$. Найдите максимальную

высоту (в метрах), на которую поднимется трезубец относительно горизонта, если $v = 8\sqrt{2} \frac{6}{c}, \gamma = 45^\circ$.

Ответ: 3,2

Решение: подставляя искомые значения получаем $h(t) = 8x - 5x^2$. Это парабола с ветвями вниз, следовательно её максимум достигается в вершине $\Rightarrow x_{\text{в}} = \frac{-8}{-10} = 0,8 \Rightarrow h(0,8) = 8 * 0,8 - 5 * 0,64 = 3,2$

Часть 2

13) Стив построил большой округлый (насколько это возможно) загон с высоким забором и захотел разделить его перегородками на некоторое количество круговых секторов с одинаковым образующим углом, чтобы в каждом секторе размножать отдельных животных.

а) Стив хочет найти такие углы γ , удовлетворяющие уравнению $\sin 2\gamma = \text{tg } \gamma$. Помогите ему найти их всех.

б) Теперь помогите Стиву отобрать из всех углов $\gamma \in (0; 2\pi)$ только те, которые смогут разделить его загон на одинаковые круговые сектора.

Решение:

$$\text{а) } \sin 2x = \text{tg } x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x \cos^2 x = \sin x \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x (2\cos^2 x - 1) = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

Получаем $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) Сначала отобрав корни, принадлежащие $(0; 2\pi)$, получим $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}, x = \pi, x = \frac{5\pi}{4}$ и $x = \frac{7\pi}{4}$. Очевидно, что из всего этого некоторое количество раз по углу может влезть в 2π только при $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \pi$.

14) Алекс построила полый (с нулевым освещением внутри) куб из туфа с толщиной стенок в 1 блок, причём концы одной из его диагоналей имеют координаты (10;10;10) и (111;111;111). При себе у неё есть неограниченный

Т	13	12	11	10	9	8	9	10	11	12	13	Т
13	12	11	10	9	8	9	8	9	10	11	12	13
12	11	10	9	8	9	10	9	8	9	10	11	12
11	10	9	8	9	10	11	10	9	8	9	10	11
10	9	8	9	10	11	12	11	10	9	8	9	10
9	8	9	10	11	12	13	12	11	10	9	8	9
8	9	10	11	12	13	Т	13	12	11	10	9	8

набор самых ярких прозрачных источников освещения уровнем света 15, которые освещают территорию вокруг себя (в виде октаэдра, если распространению света ничего не мешает) в радиусе 14 блоков: вдоль осей координат свет от источника уменьшается на один уровень света на

каждый блок; по диагонали уменьшается на сумму расстояния вдоль каждой оси (На изображении показан пример распространения света от источника, буквами Т обозначены факела, имеющие уровень света 14, в нашем случае источник имеет уровень 15, следовательно он освещает свой блок на 15)

а) Алекс разместила в каждом углу внутренней полости куба по 1 источнику света. Докажите, что отношение объёмов освещенной и неосвещенной частей $< 0,01$ (освещенная = ненулевой уровень).

б) Фантомы в Minecraft спавнятся при освещении не более 7 уровней. У Алекс есть 5 источников освещения. Какое максимальное по объёму пространство, в котором не будут спавниться фантомы, можно осветить ими, если каждая из областей источников освещения не должна быть отделена от других неосвещенным пространством?

Ответ на пункт Б: 2875.

Решение: найдём объем внутренней полости: $V = ((111 - 10 + 1) - 2) \cdot ((111 - 10 + 1) - 2) \cdot ((111 - 10 + 1) - 2) = 1000000$ блоков.

а) Область, освещаемая каждый источником, размещенным во внутреннем углу куба, представляет собой прямоугольную пирамиду, объём которой равен $(15 + 14 + \dots + 2 + 1) + (14 + 13 + \dots + 2 + 1) + \dots + 1 = \frac{(1+15)15}{2} + \frac{(1+14)14}{2} + \dots + 1 = 120 + 105 + 91 + \dots + 3 + 1 = 680$ блоков. Таких пирамид 8 штук, следовательно общий объём освещенной части $680 \cdot 8 = 5440$ блоков. Объём неосвещенной части тогда равен $1000000 - 5440 = 994560$ блоков. Следовательно отношение объёмов освещенной и неосвещенной части равно $5440 : 994560 \approx 0,005 < 0,01$, ч. т. д..

б) Максимально 1 источник света уровнем 15 может освещать область с освещением не менее 7 уровней в виде октаэдра, объём которого равен $(1 + 3 + \dots + 13 + 15 + 13 + 11 + \dots + 1) + 2 \cdot (1 + (1 + 3 + 1) + (1 + 3 + 5 + 3 + 1) + \dots + (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1)) = 113 + 2 \cdot (1 + 5 + 13 + 25 + 41 + 61 + 85) = 113 + 2 \cdot 231 = 575$ блоков. Всего источников 5, значит максимально возможный объём равен $5 \cdot 575 = 2875$ блоков. Очевидно, что мы сможем достичь этой оценки, так как сторона внутренней полости = 100, и если даже мы будем ставить источники света вдоль одной из осей, то у нас еще будет $100 - 15 \cdot 5 = 25$ блоков в сумме до границ.

15) Зури построил квадрат со стороной n блоков из медных ламп, которые являются ячейками памяти – если их 1 раз активировать кнопкой, то они поменяют своё состояние: с потушенной на зажженую и наоборот. После того, как он поставил все лампы, он доставил еще 12,5% ламп дополнительно. Найдите все возможные n , если на итоговом полотне можно показать не более 2^{64} различных изображений.

Ответ: $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Решение: количество вариантов изображений при площади k блоков тождественно равно 2^k , следовательно составим неравенство по условию и получим $2^{n^2 \cdot \frac{9}{8}} \leq 2^{64} \Leftrightarrow \frac{9}{8}n^2 \leq 64 \Leftrightarrow n^2 \leq \frac{512}{9} \Leftrightarrow 0 < n \leq \frac{16\sqrt{3}}{3}$. Заметим, что $\frac{16\sqrt{3}}{3} \approx 9,2 \Rightarrow n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

16) Стив всё же построил свой округлый загон и начал размножать животных. Изначально у него было некоторое чётное количество взрослых коров, каждый день он попарно размножал взрослых особей, получая одну молодую особь с каждой пары, которая вырастет только на следующий день. Также начиная с третьего дня он убивал определенный процент взрослых коров для получения мяса и кожи. Распорядок дня такой: сначала дети вырастают, потом Стив размножает коров, затем убивает некоторый процент. Сколько у него изначально было взрослых коров, если в четвертый день у него оказалось 468 коров и суммарное количество убитых коров за 4 дня – 207?

Ответ: 200 коров.

Решение: пусть $2S$ – изначальное количество коров, $p\%$ – процент коров, которые будут убиты ежедневно с третьего дня. Тогда составим таблицу:

День	Количество взрослых коров	Количество детей	Сколько убито взрослых
0	$2S$	0	0
1	$2S$	S	0
2	$3S$	$1,5S$	0
3	$4,5S - 4,5S \cdot 0,01p$ $= S(4,5 - 0,045p)$	$0,5 \cdot 4,5S$	$0,045Sp$
4	$S(4,5 - 0,045p + 0,5 \cdot 4,5)$ $- S(4,5 - 0,045p + 0,5 \cdot 4,5)$ $\cdot 0,01p$ $= S(0,00045p^2 - 0,1125p + 6,75)$	$0,5S \left(\begin{matrix} 4,5 - 0,045p \\ + 0,5 \cdot 4,5 \end{matrix} \right)$ $= 0,5S(6,75 - 0,045p)$	$S(4,5 - 0,045p + 0,5 \cdot 4,5)$ $\cdot 0,01p$ $= Sp(0,0675 - 0,00045p)$

--	--	--	--

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} S(0,00045p^2 - 0,1125p + 6,75) = 468 \\ Sp(0,1125 - 0,00045p) = 207 \end{cases}$$

Откуда следует $p = 20$ и $S = 100$, следовательно $2S = 200$.

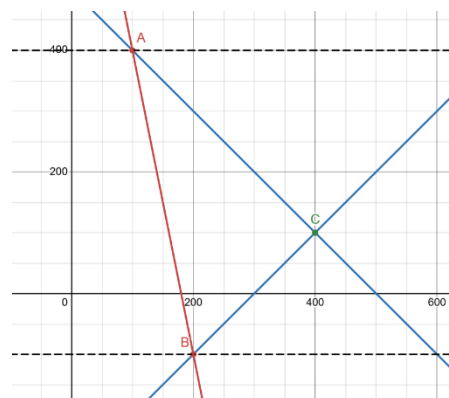
17) Стив решил убить Дракона Энда. Для этого ему нужно найти крепость с помощью броска ок Энда, которые показывают направление крепости относительно игрока. Стив задумывается: “Можно ли найти крепость Края только с помощью двух ок?” Стив делает первый бросок на координатах $(100; 400)$ и око летит под углом 45° к прямой, параллельной оси абсцисс. Затем Стив совершает второй бросок на координатах $(200; -100)$ и око летит снова под углом 45° к прямой, параллельной оси абсцисс.

а) Докажите, что приведенных данных достаточно для вычисления координат крепости, и найдите координаты крепости.

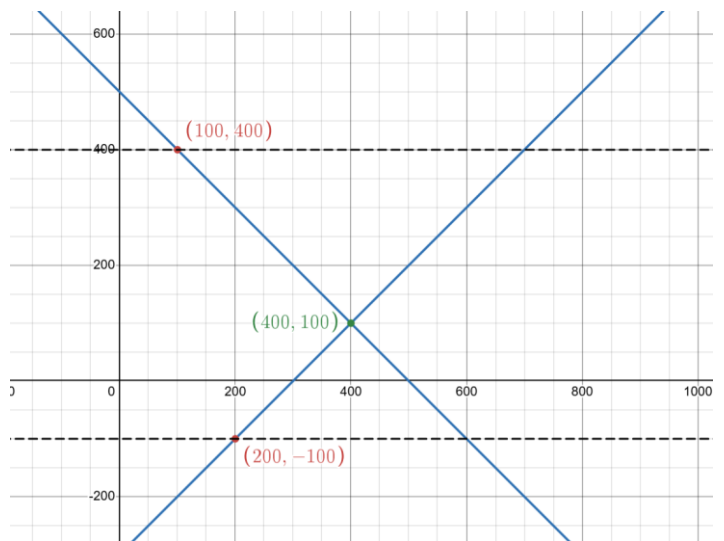
б) Найдите расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника, вершинами которого являются крепость и две точки бросков.

Решение:

а) Зная координаты двух мест бросков и углы полёта, можно однозначно задать две прямые на плоскости. Получаем уравнения прямых $y = x - 300$ и $y = 500 - x$. Угловые коэффициенты прямых не равны, поэтому они точно пересекаются в 1 точке, и это точка $(400; 100)$.



б) Угол ACB равен 90° , так как он образован прямыми с коэффициентами -1 и 1 , следовательно ACB – прямоугольный с катетами $200\sqrt{2}$ и $300\sqrt{2}$ и гипотенузой $100\sqrt{26}$. Радиус описанной окружности около треугольника R равен половине гипотенузы, т.е. $R = 50\sqrt{26}$. Радиус вписанной окружности можно найти по



формуле $r = \frac{BC+AC-AB}{2} = \frac{500\sqrt{2}-100\sqrt{26}}{2} = 250\sqrt{2} - 50\sqrt{26} = 50 \cdot (50\sqrt{2} - \sqrt{26})$. Расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей равно $R^2 - 2Rr = 195000 - 500000\sqrt{13}$ блоков.

18) Стив победил Дракона Энда и пошёл исследовать просторы Дальнего Энда. В одном из городов Энда он нашёл записку, в которой были написана одна из двух ключевых координат другого города Энда, а вторую координату предлагалось найти самому. Подсказкой было следующее:

“Ключ ко второй координате – значения параметра a , при которых решением совокупности неравенств

$$(x^4 - 5x^2 + 4) \cdot \sqrt{-a^2 - 3a} \leq 0 \text{ и}$$

$$(ax^2 - a - x^2 + 1) \cdot \sqrt{-a^2 + a + 6} \cdot \sqrt{9 - x^2} \geq 0$$

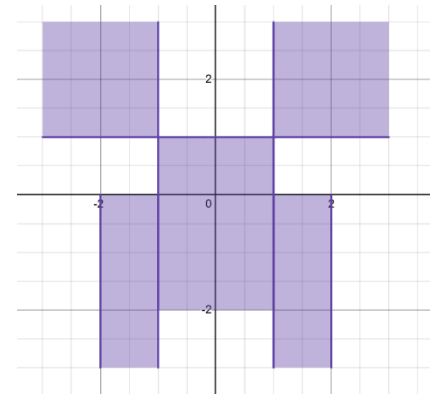
будет отрезок $[-3; 3]$. Считайте, что решения неравенств независят друг от друга (области определения неравенств в том числе) и в конце они лишь объединяются...”

Помогите Стиву найти вторую координату, ведь он – не математик, а вы – может быть!

Ответ: $a = 2$

Решение:

Изобразим совокупность решений искомых неравенств на координатной плоскости xOa . Очевидно, что под условие подходит только значение $a = 2$.



19) Алекс построила квадратный сад для берёз размером 2500 на 2500 деревьев. Со одной стороны от каждого столбика и каждой строки сада она поставила таблички с какими-то числами, причем каждое из написанных чисел либо рациональное, либо иррациональное, а также и тех, и тех поровну. Затем она подписала каждое дерево в саду произведением чисел в соответствующем этому дереву столбце и строке.

а) Могут ли все деревья в саду быть подписаны рациональными числами, если все изначальные числа по бокам от столбцов и строк необязательно различны?

б) Могут ли все деревья в саду быть подписаны иррациональными числами, если все изначальные числа по бокам от столбцов и строк попарно различны?

в) Какое максимальное количество деревьев может быть подписано рациональными числами, если все изначальные числа по бокам от столбцов и строк попарно различны и среди них нет нулей?

Решение:

а) Да, например если все числа НАД столбцами равны нулю.

б) Да, например если все числа сверху $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \dots, 2025\sqrt{2}$, а числа слева – $1, 2, \dots, 2025$. Тогда все произведения будут иррациональными.

в) Докажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 3125000. Пусть вдоль левой стороны таблицы выписано x иррациональных и $2500 - x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны выписаны $2500 - x$ иррациональных и x рациональных чисел. Произведение ненулевого рационального и иррационального чисел всегда иррационально, поэтому в таблице стоит хотя бы $x^2 + (2500 - x)^2$ иррациональных чисел. При этом $x^2 + (2500 - x)^2 = 2x^2 - 5000x +$

$2500^2 = 2(x - 1250)^2 + 3125000 \geq 3125000$, что и требовалось. Отсюда следует, что в таблице не более $6250000 - 3125000 = 3125000$ рациональных чисел. Ровно 3125000 рациональных чисел в таблице может быть, например, в таком случае: вдоль левой стороны стоят числа $1, 2, \dots, 1249, 1250, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \dots, 1249\sqrt{2}, 1250\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны — числа $1251, 1252, \dots, 2499, 2500, 1251\sqrt{2}, 1252\sqrt{2}, \dots, 2499\sqrt{2}, 2500\sqrt{2}$. Тогда иррациональными будут только $2 \cdot 1250^2 = 3125000$ произведений рационального и иррационального чисел.