Банк задач

1 Вероятность

1. На выборах президента страны N кандидаты А, Б и В набрали некоторое количество голосов, причём среди голосовавших на выборах — 40% мужчин. Известно, что за каждого кандидата голосовали хотя бы 1 мужчина и 1 женщина. Также известно, что за кандидата В проголосовало в два раза меньше людей, чем за кандидатов А и Б в сумме. Распределение голосов мужчин у всех кандидатов отдельно следующее: за А — 10%, за Б — 50%, за В — 40%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный избиратель проголосовал за кандидата А.

2. В трёхмерном пространстве расположен прямоугольный параллелепипед, в который вписана фигура Ф, являющаяся объединением двух равных сфер с единичным радиусом, касающихся друг друга в центре параллелепипеда. Найдите вероятность того, что случайно выбранная точка внутри параллелепипеда будет также находиться внутри фигуры Ф.

3. Артём обводит строго по границам клеток на клеточном поле 10×10 случайный прямоугольник. Найдите вероятность того, что он обведёт квадрат с единичной стороной.

4. Настя написала на доске всевозможные представления числа 1024 в виде произведения двух натуральных множителей (представления, отличающиеся перестановкой, считаются одинаковыми). Найдите вероятность того, что в случайно выбранном представлении сумма множителей больше тысячи.

5. Михаил задал в пространстве 10 точек так, что любые три точки не лежат на одной прямой, и соединил отрезками каждую точку с каждой. Среди всех точек есть точки A и B. Найдите вероятность того, что случайно выбранным отрезком будет отрезок AB.

6. Артём хочет написать строку из трёх "(" и трёх ")" так, чтобы каждая открытая скобка в итоге закрывалась, например так: "()()()", но не так: ")()()(". Какова вероятность того, что Артём составит строку "()()()"?

7. На координатной плоскости заданы фигуры А и Б следующим образом: $A = \{0 \leq x \leq 5,\ y \geq 0\}$, $B = \{(x+y)(x-y) \leq 0,\ 0 \leq y \leq 5\}$. Найдите вероятность того, что случайно взятая точка в объединении этих фигур будет находиться в их пересечении.

8. Никита разбивает отрезок длиной 10 клеток на три отрезка с целыми длинами двумя чертами. Какова вероятность того, что все отрезки будут разной длины?

9. Вячеслав написал на доске такие три приведенных квадратных трёхчлена, что сумма любых двух из них не имеет корней. Найдите вероятность того, что сумма всех трёх многочленов имеет корни.

10. Случайная величина X принимает любые натуральные значения. Функцией распределения случайной величины является

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{10} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{2}, & x \in [1;5] \\ \max\big(0,\ -21024x^2 + 21025x - 21026\big), & x \notin [1;5] \end{cases}$$

Найдите модуль разности сумм вероятностей чётных и нечётных чисел.

11. Артём выбирает случайное натуральное число, не большее 100. С какой вероятностью выбранное число будет палиндромом? (Палиндром – число, которое при отражении своих цифр относительно середины переходит само в себя)

12. В психбольнице с безумно большим конечным числом пациентов каждый пациент проходит тест на вменяемость, который оценивается целым числом баллов от 0 до 10. Персонал клиники выяснил, что от 0 до 5 баллов включительно вероятность растёт на одну и ту же величину по сравнению с предыдущей, а с 5 до 10 баллов падает на эту же величину, причём вероятности нулевого и десятибалльного результата одинаковы. По результатам теста пациента причисляют к определенному уровню организации личности: меньше 3 баллов – "психотический", от 3 до 7 включительно – "пограничный", а все остальные причисляются к "невротическому" уровню. Также известно, что из всех пациентов клиники к пограничному уровню было причислено 63% пациентов. Найдите вероятность попадания человека в категорию "психотического" уровня.

13. Исполнитель Черепаха, расположенный на координатной плоскости в начале координат за 1 шаг с одинаковой вероятностью поворачивается либо на 45° вправо, либо на 45° влево, и затем всегда передвигается вперед на некоторый единичный отрезок, оставляя за собой след. С какой вероятностью Черепаха нарисует правильный восьмиугольник за 8 шагов?

14. Среди всех пациентов клиники с диагностированным биполярным расстройством личности (БАР) 40% страдает расстройством 1 типа, у остальных диагностирован 2 тип. Известно, что БАР обоих типов часто коморбидно с пограничным расстройством личности (ПРЛ): ПРЛ диагностируется у 75% болеющих БАР 2 и у 25% болеющих БАР 1 типа. Найдите вероятность того, что у больного БАР будет диагностировано ПРЛ.

15. Артём написал на доске натуральные числа от 1 до 100 включительно, а затем случайным образом вычеркнул два из них. С какой вероятностью модуль разницы вычеркнутых чисел равен 90?

16. Артур выбирает случайное число от 1 до 10. С какой вероятностью случайно выбранное число будет иметь чётное количество делителей?

17. У Арсения в плейлисте собрано 10 песен. При перемешивании песен порядок песен в очереди выставляется совершенно случайным образом. Арсений включил случайную песню плейлиста с включённой функцией перемешивания очереди. Найдите вероятность того, что первые две песни в плейлисте сохранят свою позицию при перемешивании и будут первыми двумя в очереди.

18. С какой вероятностью в случайную минуту суток на электронных часах часы вместе с минутами образуют число-палиндром? (например, 11:11 или 23:32)

19. Стрелок стреляет по мишеням. Если стрелок попадает ровно в центр мишени, то стрелок получает 2 балла, если он попал в мишень, но не в центр – 1 балл, а если промахнулся – лишается одного балла, если у него до этого уже были баллы. Вероятность попадания стрелка в центр мишени при каждом отдельном выстреле равна 0.1, а вероятность промаха – 0.5. Стрелок по очереди стреляет по пяти мишеням. Найдите вероятность того, что он получит 5 баллов в сумме.

20. Нейросети скармливают фотографии животных. Нейросеть угадывает кошку на фотографии в половине случаев, а собаку лишь в четверти. В определенный момент нейросети скормили пять фотографий: под чётными номерами были кошки, а под нечётными – собаки. С какой вероятностью нейросеть угадает животное хотя бы на одной фотографии?

21. Известно, что в случайный летний день вероятность дождя – 0.2, вероятность сильного ветра – 0.4, также возможен случай обоих явлений с вероятностью 0.05. Найдите вероятность того, что в случайный летний день будет отличная погода.

22. После того, как Иван Валериевич Ященко дал на основной волне ЕГЭ по профильной математике 27 мая 2025 года самый отборный калл во второй части, вероятность подрыва здания ФИПИ увеличилась на 0.5, и теперь она в сумме с предыдущей составляет единицу. Найдите вероятность подрыва здания ФИПИ после шутки Ященко.

23. Артём составляет пятибуквенные слова из букв А, Б, В, Г и Д. С какой вероятностью Артём составит слово, буквы в котором будут идти в алфавитном порядке?

24. Артём составляет шестибуквенные слова из букв АБВГДЕ. С какой вероятностью в слове сначала будут идти гласные, а потом согласные буквы?

25. До взрыва бомбы некоторое количество секунд. Известно, что бомба взорвётся в первую секунду с вероятностью p, а в каждую следующую секунду вероятность растет в два раза. В какую секунду бомба гарантированно взорвётся, если $p > 0{,}05$?

26. Никита закрашивает клетки таблицы 3×3 в случайный цвет (красный или синий). С какой вероятностью вся таблица будет красной после закрашивания всех клеток?

27. Агрофирма выращивает морковь. Вероятность того, что случайная морковь будет меньше 8 см в длину равна 0.1, а вероятность того, что будет больше 15 см равна 0.2. С какой вероятностью длина моркови будет от 8 до 15?

28. На доске написан ноль. Артём за один ход стирает число на доске и вместо него пишет либо число на 1, либо на 2 больше. В итоге Артём получил число 4 на доске и прекратил этим заниматься. С какой вероятностью Артём писал только чётные числа на протяжении всего процесса?

29. На вечеринке 10 друзей, в том числе Артём. Друзья купили один торт и хотят его разрезать на 12 кусочков и их раздать так, чтобы у каждого был хотя бы 1 кусок, а дополнительные раздать случайным образом. С какой вероятностью Артём получит 2 дополнительных куска?

30. В некоторой группе из 10 человек каждый знаком с пятью другими людьми. С какой вероятностью пара случайных людей знакомы?

31. В произвольном треугольнике ABC провели все три средние линии, образовавшие треугольник MNK. С какой вероятностью случайно выбранная точка внутри треугольника ABC будет лежать внутри треугольника MNK?

32. В таблице 10×10 закрасили одну случайную клетку красным, а затем отрезали от неё несколько случайных прямоугольников с суммарной площадью в 75 клеток. С какой вероятностью красная клетка будет отрезана?

33. Миша рассматривает шестиэлементное множество целых неотрицательных чисел, дающих всевозможные остатки при делении на 6. С какой вероятностью сумма двух случайных элементов будет делиться на 6?

34. Случайные 5 клеток клеточного поля 5×5 заминировали. С какой вероятностью будет заминирована ровная линия из 5 клеток?

35. Артём выбирает случайное число от 1 до 1000 включительно. С какой вероятностью он выберет число, делящееся на 228?

36. Артём выбирает два случайных различных числа от 1 до 10. С какой вероятностью он выберет два взаимно простых числа?

37. Цвет пикселя на мониторе составляется из трёх цветовых каналов: красного, зелёного и синего. Интенсивность каждого из каналов измеряется целым числом от 0 до 255 включительно. С какой вероятностью при генерации случайного набора каналов значения всех трех каналов будут чётны?

38. На карточках написаны числа от 1 до 100, на 1 карточке 1 число. На обратной стороне карточки маркером оставляют красную полоску, если число четное, зеленую, если делится на 3, и синюю, если делится на 5. С какой вероятностью на случайно взятой карточке будут три полоски?

39. На доске написаны числа от 1 до 5. С какой вероятностью случайно взятая тройка чисел будет являться сторонами прямоугольного треугольника?

40. На доске написаны числа от 1 до 10. С какой вероятностью случайно взятое число является биномиальным коэффициентом (является числом сочетаний / встречается в треугольнике Паскаля)?

41. На доске написаны числа от 1 до 10. С какой вероятностью случайно взятое число будет являться одним из коэффициентов в разложении $(x+1)^5$?

42. На доске написано предложение: “Осень, лето, весна и зима — это времена года”. Случайно взятую букву зачеркивают. С какой вероятностью зачеркнута будет гласная буква?

43. В классе из 9 человек каждый ученик дружит со всеми остальными. В определенный момент ровно 9 пар учеников ссорятся. С какой вероятностью случайно взятая пара учеников дружит?

44. Никита выигрывает у Саши поединок в армрестлинге с вероятностью 0.7, а Вячеслав побеждает Сашу с вероятностью 0.6. С какой вероятностью и Никита, и Вячеслав проиграют Саше?

45. Ященко с вероятностью 0.3 даёт на ЕГЭ 2030 по профильной математике сложный вариант, а с вероятностью 0.4 - очень простой. С какой вероятностью он даст вариант средней сложности?

46. Никита переставляет буквы в слове ИКИТНА. С какой вероятностью он составит из них своё имя?

47. Артём рассматривает функцию $f(x) = 123456789x+1$ на множестве натуральных чисел от 1 до 100. С какой вероятностью значение функции в случайной точке на указанном отрезке чётно?

48. Артём рассматривает набор функций: $f_1(x) = |x| + 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$, $f_4(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{|t|}\,dt$. С какой вероятностью случайно выбранная $f_i(x)$ будет четной?

49. Используя четную $g(x)$ и нечетную $h(x)$, Артём ввёл ряд функций: $h_1(x) = g(x) \cdot h(x)$, $h_2(x) = g(x) + 2h(x)$, $h_3(x) = 32g(x) + 100h(x)$, $h_4(x) = 2g(x) + |h(x)|$. С какой вероятностью случайно выбранная $h_i(x)$ будет четной?

50. У Маши есть 3 пирожка и 4 друга. Она случайно раздает пирожки друзьям, причём может быть такое что все три пирожка получил один друг. Какова вероятность такого исхода?

51. Квадрат разбит на 10 частей равной площади, причём шесть случайных частей раскрасили в зеленый, а остальные в красный. Во сколько раз вероятность случайно взятой точки внутри квадрата на зеленую область больше вероятности попадания точки на красную область?

52. Юрий случайно выбирает пятерку различных натуральных чисел от 1 до 100 включительно. С какой вероятностью числа дают всевозможные остатки при делении на 5?

53. Артур бросает кубик n раз. Найдите максимальное n, при котором вероятность суммы выпавших очков равной $n \geq 0{,}01$.

54. Артём зачеркивает одну случайную букву в слове ШАРОМЫЖНИК. С какой вероятностью будет зачеркнута гласная буква?

55. Артём составляет шестибуквенные слова из букв АБВУ. С какой вероятностью как минимум половина букв в слове будут гласными?

56. В единичном правильном шестиугольнике случайно соединили две случайных несмежных вершины. С какой вероятностью длина проведенного отрезка больше $\sqrt{3}$?

57. Артём рассматривает строго монотонно убывающую функцию $f(x)$ на отрезке $[0; 1]$, график которой проходит через $(0; 1)$ и $(1; 0)$. Артём случайно выбирает 100 точек на графике функции, принадлежащих интервалу $(0; 1)$. С какой вероятностью длина отрезка, проведенного между двумя любыми искомыми точками больше $\sqrt{2}$?

58. На планете N есть только ясная и дождливая погода. Известно, что если вероятность дождя в некоторый день равна p и дождь пошёл, то на следующий день вероятность дождя будет уже $2p$, а если дождя не будет, то на следующий день он пойдет с вероятностью $\frac{5}{4}p$. Пусть 1 июля вероятность дождя — $\frac{1}{2}$. С какой вероятностью среди 1, 2, 3 и 4 июля дождь пойдет ровно в двух днях?

59. Артём нарисовал окружность, провёл диаметр и случайно отметил на окружности две точки, не совпадающие с концами диаметра. С какой вероятностью хорда с концами в этих точках пересечет диаметр?

60. Учёный изучал звезды на небе и решил спроецировать их на плоскость с декартовой системой координат. На плоскости образовалась тройка кластеров звёзд в виде плотных кругов из точек с количеством звёзд 256, 351 и 386 соответственно в каждом. Также учёный заметил 7 звёзд, находящихся на большом расстоянии от кластеров, их он назвал одинокими. С какой вероятностью случайно взятая звезда не будет одинокой?

61. Илья выбирает случайное число от 1 до 100 включительно. С какой вероятностью оно будет делиться на 4 или давать единичный остаток при делении на 8?

62. Назовём треугольным такое число n, для которого $8n+1$ будет являться полным квадратом некоторого натурального числа. Кирилл выбирает случайное число от 1 до 100 включительно. С какой вероятностью оно будет треугольным?

63. Назовём пятиугольным такое число, которое может быть значением функции $f(n) = \dfrac{3n^2-n}{2}$ при каком-либо натуральном n. Валерия выбирает случайное число от 1 до 100 включительно. С какой вероятностью оно будет пятиугольным?

64. С какой вероятностью в случайную минуту суток на электронных часах будет отображаться полный квадрат? (Например, 0:09, 4:41, 23:04)

65. Никита рассматривает натуральные значения функции $f(n) = 5n^2 - 4n$ при натуральных n на отрезке $[1; 100]$. С какой вероятностью при случайном выборе значения аргумента $f(n)$ оканчивается на 5?

66. В игре Minecraft курица даёт яйцо в конкретную секунду с вероятностью 0.01, но у курицы есть перерыв между яйцами в 1 минуту. С какой вероятностью курица даст 3 яйца за 3 минуты 2 секунды?

67. Известно, что в единственной строке файла F буква А встречается 10 раз, буква Б — 101, буква В — 1000 раз, других букв в строке нет, а длина строки — 10000. С какой вероятностью случайно выбранный символ является буквой?

68. Евгений выбирает случайное натуральное число от 0 до 99 включительно. С какой вероятностью оно будет давать чётный остаток при делении на 5?

69. Тимофей выбирает случайное натуральное число от 1 до 100 включительно. С какой вероятностью его сумма цифр равна 7?

70. Никита на клеточном поле 3×3 проводит отрезок с концами в узловых точках, не параллельный сторонам поля. С какой вероятностью длина отрезка будет меньше $3\sqrt{2}$?

71. Андрей рассматривает случайный год от 2001 до 2025 включительно. С какой вероятностью он будет високосным?

72. Роман рассматривает натуральные делители числа 2025. С какой вероятностью случайно выбранный делитель будет делиться на 5?

73. Ангелина выбирает случайное натуральное число от 1 до 100 включительно. С какой вероятностью сумма всех его простых делителей чётна?

74. Пусть X — случайная величина, равновероятно принимающая значения 1, 2, 3 и 9. Найдите значение выражения $P(20X = 10 \cdot (X = 0))$!

75. A, B и C — некоторые события, причем $P(A) + P(B) + P(C) = 1$. Известно, что $P(A \text{ или } B) = 0.2$, а $P(B \text{ или } C) = 0.4$. Найдите значение выражения $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

76. В двух торговых центрах, расположенных на разных концах большого города, стоит по одному банкомату. Известно, что к концу дня деньги заканчиваются в каждом из банкоматов с разной вероятностью вследствие разной плотности населения и других факторов. Известно также, что к концу дня деньги закончатся в обоих банкоматах с вероятностью 0.42, а останутся с вероятностью 0.52. Найдите сумму вероятностей израсходования денег в каждом банке в отдельности.

77. Некоторая организация проводит гонки улиток, на которых каждый желающий может поставить деньги только на выигрыш одной конкретной улитки в каждой отдельной гонке. Всего на турнире 17 июля будет 5 гонок и 5 одинаковых улиток на каждой. Перед самыми первыми гонками на турнире организация показывает коэффициент каждой улитки, не меняющийся в течении турнира, на который при победе улитки поставленные деньги умножатся. Перед началом турнира коэффициенты улиток выглядели так:

№ улитки	1	2	3	4	5
Коэффициент	1,8	1,4	1,9	1,2	1,5

Известно, что коэффициент напрямую связан с вероятностью выигрыша следующим образом: Коэффициент = 2 − вероятность. Павел хочет поставить свои деньги следующим образом: в k-ой гонке он ставит на победу k-ой улитки, причем во всех ставках ставит одну и ту же сумму. С какой вероятностью Павел полностью прогорит?

78. Назовём всю декартову плоскость полем, а каждую целочисленную точку цветком. Введём функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, перемещающую пчелу с некоторого цветка на случайный цветок, находящийся на расстоянии от предыдущего не более чем в 5 единичных отрезков, причём перемещение также может и не совершиться и все места для перемещения равновероятны. В начальный момент пчела сидит на цветке с координатами $(1;1)$. С какой вероятностью после выполнения функции пчела окажется на цветке с положительными координатами?

79.1 Назовём всё множество натуральных чисел полем, а каждое число цветком, причём число 1 – первый цветок, 2 – второй и т.д. Введём функцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, перемещающую пчелу с некоторого цветка на случайный цветок, находящийся на расстоянии от предыдущего не более чем в 5 цветков, причём все места для перемещения равновероятны и после каждого перемещения расстояние между пчелой и первым цветком не уменьшается. В начальный момент пчела сидит на первом цветке. С какой вероятностью после трёх выполнений функции пчела окажется на тринадцатом цветке?

79.2 Назовём всё множество натуральных чисел полем, а каждое число цветком, причём число 1 – первый цветок, 2 – второй и т.д. Введём функцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, перемещающую пчелу с некоторого цветка на случайный цветок, находящийся на расстоянии от предыдущего не более чем в 5 цветков, причём все места для перемещения равновероятны и после каждого перемещения расстояние между пчелой и первым цветком не уменьшается. В начальный момент пчела сидит на первом цветке. С какой вероятностью после трёх выполнений функции пчела не долетит до тринадцатого цветка?

79. На координатной плоскости случайным образом выбирают точку с целыми неотрицательными координатами, не превышающими по модулю 9. С какой вероятностью сумма координат точки не будет превышать 7?

80. Генератор случайных натуральных чисел сломался и в среднем стал выдавать в 3 раза больше чётных чисел, чем нечетных. С помощью генератора получили список из 22025 чисел. С какой вероятностью сгенерированное число будет нечётным?

81. Найдите вероятность того, что при выборе случайного десятизначного двоичного кодового замка будет выбран замок, в котором нет двух единиц подряд.

82. Никита выписал на доску факториалы натуральных чисел, меньших 11. С какой вероятностью случайно выбранное число из написанных на доске является полным квадратом?

2 Комбинаторика

1. Валера составляет строку из 5 символов, являющуюся корректным арифметическим выражением, в начале и конце которого не могут стоять знаки арифметических операций и в которой не должно быть незначащих нулей. При составлении строки он использует только цифры от 1 до 5 и знаки сложения и вычитания. Сколько строк может составить Валера?

3 Пределы

1. Вычислите

a) $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2\sin x$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x-2}{2n+1}\cos x$

2. Вычислите

a) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{x-\sin x}{y\sin z}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{x-\sin x}{y\sin z}$

3. Вычислите

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+7x+10}{2x^2+6x+5}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+7x+10}{6x^2+6x+5}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{77x^2-10x+101}{78x^2+6x+1}$

4. Вычислите

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+7x+1}{2x^2+8x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\sin x}}{\tan(\frac{\pi x}{4})}$

5. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(75x^5-23x^3+e^{-x}+\sqrt{10x+54}\right)$.

4 Векторы

1. В пространстве заданы вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $|\vec{a}| = |\vec{c}| = 9$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 60°$. Найдите длину вектора $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

2. Из одной точки исходят три попарно перпендикулярных вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ длины 1. Найдите квадрат длины вектора $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

3.1 Пусть $\mathbf{v}$ — вектор длины k. В некотором n-мерном пространстве задано множество векторов $P = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$. Известно, что скалярное произведение любых двух различных векторов множества P равно нулю. Найдите наибольшее возможное количество векторов в множестве P, если длина вектора $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_m) \leq 11$.

3.2 Пусть $\mathbf{v}$ — вектор длины k. В некотором n-мерном пространстве задано множество векторов $P = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$. Известно, что скалярное произведение любых двух различных векторов множества P равно нулю. Найдите такое наименьшее n, что длина вектора $(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\cdots+\mathbf{v}_m)$ не больше количества всевозможных пар векторов множества P.

5 Уравнения (ЕГЭ)

1. a) Решите уравнение: $2025\cos(\arcsin x)2024 - \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2024\cdot 2025}\right)\sin(\arccos x) = 0$.

b) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

2. a) Решите уравнение: $e^{\tan(\frac{\pi x}{16})} = \tan(\frac{\pi x}{16}) + 1$.

b) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\ln e^{\sqrt{1337}}; \sqrt[4]{1234567}]$.

3. a) Решите уравнение: $\sin^4(\frac{x}{4}) + 4\sin^3(\frac{x}{4}) + \cos^2(\frac{x}{4}) = 5\sin^2(\frac{x}{4}) + 4\sin(\frac{x}{4})$.

b) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[42; 52]$.

4. a) Решите уравнение: $26\sin^3 x + 169\cos^2 x = 234 - 208\sin x$.

b) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$.

5. a) Решите уравнение: $\log_2 16 \cdot \sin^2 x - \log_{\sqrt{12}} \sin x = 21.5\sin x - 26\sqrt{6}\cos^2 x - 13\sqrt{6} - 26\sin^2 x$.

b) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$.

6. a) Решите уравнение: $\dfrac{20\sin x\cos x - \tan^2 x - \tan x + 2\sin x}{2\tan^2 x + 4\tan x\sin x\cos x - 5} = 0$.

b) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

6 Неравенства

1. Решите неравенство:

$$\frac{(\log_{x-1} 4 - \log_{x-1} 7)(\arcsin(7x) - \arcsin(6x))}{(\arccos(x+1) - \arccos(2x))(\tan(\frac{1}{1+x^2}) - \tan(\frac{1}{1+x^4}))}(\sqrt{x} - \sqrt{3}) \leq 0.$$

2. Решите неравенство:

$$\frac{(x-1)(3x-1)(5x-1)\ldots(99x-1)}{(2x-1)(4x-1)(6x-1)\ldots(98x-1)} \geq 0.$$

3. Решите неравенство: $\cos(\cos x) > \dfrac{1}{2}$.

4. Решите неравенство: $\sqrt{\cos x} \geq 2x - 1$.

7 Экстремальные задачи из ЕГЭ

1. Найдите точку максимума $f(x) = e^{-0.5x^2}$.

2. Найдите точку минимума $f(x) = e^{0.2x^2}$.

3. Найдите наименьшее значение $f(x) = \sin x + 2 - x$ на $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.

4. Найдите наименьшее значение $f(x) = x^2 - 4|x| + 4$.

5. Найдите наименьшее / наибольшее значение $f(x) = e^{7x^3}$ на $[\sqrt[3]{\frac{\ln 2}{7}}; \sqrt[3]{\frac{\ln 7}{7}}]$.

6. Найдите наименьшее / наибольшее значение $f(x) = 2025x + 2023x + \cdots + 3x + x$ на $[-1; 1]$ / $[0; 1]$ / $[1; 2]$.

7. Найдите наименьшее / наибольшее значение $f(x) = \log_{2025} x + \log_{2023} x + \cdots + \log_3 x + \log x$ на $[a; 2a]$ / $[1; a]$.

8. Найдите наименьшее / наибольшее значение $f(x) = 100 + 9|x-1| + |x+1|$ на $[2; 5]$ (или на $[0; 10]$).

9. Найдите наименьшее значение $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$.

10. Найдите наибольшее значение $f(a, b, c) = a + b + c$ при $a, b, c \geq 5$.

11. Найдите наименьшее значение $f(a, b, c) = a + b + c$ при $a, b, c \geq 3$.

12. Найдите наибольшее значение $f(x, y, z) = xyz$ при $x + y + z = 9$, где x, y, z — положительные числа.

13. Найдите наименьшее значение $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ если $xyz = 3$, где x, y, z — положительные числа.

14. Найдите наибольшее значение $f(x) = \text{НОД}(x; 7!)$ при натуральных $x \leq 10$.

15. Найдите наименьшее значение $f(x) = \text{НОК}(x; 5!)$ при натуральных $x \leq 5$.

16. Найдите наибольшее значение $f(x) = \ln x - x$ на отрезке $[\frac{1}{e}; e^2]$.

8 Экономика (ЕГЭ)

1. Артём планирует в июле взять в кредит в банке S млн рублей на десять тысяч лет. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему равно S, если общая сумма выплат составит 510050 тысяч рублей?

9 Планиметрия (ЕГЭ)

1. В остроугольном треугольнике ABC опустили высоты BH и CM. Оказалось, что площади треугольника AMH и четырёхугольника MHCB равны.

(a) Докажите, что $\angle BAC = 45°$.

(b) Пусть высоты пересекаются в точке O. Найдите площадь невыпуклого многоугольника BMHCO, если $BH = 5$, $CM = 6$.

2* В единичном правильном 192-тиугольнике провели отрезки, соединяющие чётные вершины. Эту же операцию повторяли до тех пор, пока на картинке не получился правильный треугольник.

(a) Докажите, что центры симметрии искомого треугольника и 192-тиугольника совпадают.

(b) Найдите площадь внутренней части 192-тиугольника с исключением внутренней части искомого треугольника.

9.1 Тестовая часть

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $AC = \sqrt{3}$, $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите в градусах угол BAC.

2. Из точки O вне окружности проведена касательная OB и секущая, пересекающая окружность в A и C, причем A принадлежит OC. Найдите OA, если $OB = 2$ и $AC = 3$.

3. В прямоугольном треугольнике один катет на 10 больше другого, а гипотенуза равна $5\sqrt{10}$. Найдите длину наибольшего/наименьшего катета.

4. На продолжении стороны AC остроугольного треугольника ABC за точку C отметили точку D и провели через D прямую, пересекающую BC в E, а AB в F, причем $BF = FA = AC = CD$. Найдите $BE : EC$.

5. Во вписанном четырёхугольнике стороны равны 1, 3, 2 и 1, а одна из диагоналей 1. Найдите вторую диагональ.

6. На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили соответственно точки E и D так, что $BE = AE = 3$, $AD = 6$, $DC = 1$, площадь ABC = 70. Найдите площадь AED.

7. В треугольнике ABC $AB = 1$, $BC = 2$, $AC = \sqrt{3}$. Найдите угол ABC.

8. Найдите косинус угла правильного шестиугольника.

10 Математический анализ

1. Найдите значение производной 2024-ого порядка функции $f(x) = \cos x + 2^{100}$ в точке 0. [Ответ: 1]

2. Приведите пример хотя бы одной функции $f(x)$, для которой верно равенство $f(x + 2025) = f(x + 1945)$. [Ответ: любая константа]

3. Исследуйте на чётность функцию $F(x) = f(g(x)) \cdot g(f(x))$, если $f(x)$ и $g(x)$ – чётная и нечётная функции соответственно. [Чётная]

4. Приведите пример любой непостоянной функции $f(x)$, для которой при любом наборе из действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ верно тождество $f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n) = f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$.

5. Найдите среднее арифметическое координат точки, в которой функция $f(x, y, z) = |2x - y + 4z - 6| + |8x + 2y - 48z + z| + |-x - y - z + 2|$ достигает своего минимума. Гарантируется, что функция принимает свой минимум только в одной точке.

6. Никита для произвольной функции $f(x)$ строит обратную, меняя x и y местами, после чего выражает y через x, как бы получая функцию $g(x)$. Обозначим обратную функцию для $f(x)$ как $f^{-1}(x)$. Приведите пример нетривиальной (не константа и не линейная) функции $f(x)$, для которой $f(x) = f^{-1}(x)$.

7. Приведите пример функции $f(x)$, для которой при любых функциях $g(x)$ выполнено $f(g(x)) = g(f(x))$.

8. Приведите пример функции $f(x)$, для которой $f(x) \cdot f(-x) = 1$.

11 Теория чисел (ЕГЭ)

1. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ соотносит натуральное число с произведением всех его делителей, за исключением единицы и самого числа.

(a) Существуют ли такие натуральные n, для которых $f(n)$ неопределено?

(b) Разрешимо ли уравнение $f(n) = 2$ для двухзначных n?

(c) Найдите минимальное натуральное n, являющееся корнем уравнения $f(n) = n^4$.

2. Назовём "хорошим" множество различных целых чисел, любые три элемента которого могут быть коэффициентами квадратного трёхчлена с двумя корнями (с учётом перестановок).

А1 Является ли множество $\{18; -1; 0\}$ "хорошим"?

А2 Может ли множество, состоящее из трёх целых чисел, быть "хорошим"?

Б1 Является ли множество $\{17; 1; 0\}$ "хорошим"?

Б2 Может ли множество, состоящее из трёх натуральных чисел, быть "хорошим"?

В1 Сколько трёхэлементных "хороших" множеств можно составить из элементов множества $\{-1; 0; 23; 77; 100\}$?

В2 При каком наибольшем целом неположительном a из множества $\{a; -1; 0; 1; 10\}$ можно будет составить ровно 6 "хороших" множеств?

3. На доске написаны цифры 0, 2, 4, 6 и 8 в некотором порядке, причём каждая цифра записана дважды.

(a) Можно ли составить из этих цифр пятизначное число, делящееся на 7 и на 191 одновременно?

(b) Можно ли составить из этих цифр такое натуральное число, большее 9, произведение цифр которого будет не меньше самого числа?

(c) Найдите наибольшее четырёхзначное число, произведение цифр которого равно 1536 и его можно составить из цифр на доске.

4. В 11А классе n учеников. Пусть k – общее количество дружеских отношений между учениками в классе.

А Существует ли такое n, при котором $k = 6$, если также известно, что каждый дружит с каждым?

Б Существует ли такое n, при котором $k = 30$, если также известно, что каждый дружит с каждым?

В.1 Пусть у каждого ученика есть ровно m друзей. Найдите наибольшее n, при котором это возможно, если $1 \le m \le 5$.

В.2* Пусть у каждого ученика есть ровно $n - m$ друзей. Найдите наибольшее n, при котором это возможно, если $1 \le m \le 5$.

5. Известно, что из пар натуральных взаимно простых чисел m и n разной чётности таких, что $m > n$, можно получить всевозможные тройки взаимно простых натуральных чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющие равенству $a^2 + b^2 = c^2$, причём $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$.

А Можно ли из какой-нибудь пары $(m; n)$ получить тройку $(10388; 6795; 12413)$?

Б Можно ли из какой-нибудь пары $(m; n)$ получить тройку $(981; 9579; 9629)$?

В1 Сколько различных троек $(a; b; c)$ можно получить из пары $(m; n)$, если $m \leq 10$ и $n \leq 10$.

В2 При каком наибольшем m можно получить не более 3 троек $(a; b; c)$ из пары $(m; n)$, если $n = 10$ и $m \leq n$.

6. Будем называть многочлен $P(x)$ степени $n \geq 2$ полным, если он имеет n необязательно различных действительных корней и его можно представить в следующем виде: $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$. Определим на множестве полных многочленов функцию дискриминанта: $D(P(x)) = a_n^{2n-2} \prod_{i \neq j} |x_i - x_j|$, где $\prod_{i \neq j} |x_i - x_j|$ – произведение всевозможных разниц корней многочлена $P(x)$, за исключением разниц корней самих с собой.

А1 Существует ли полный многочлен третьей степени с нулевым дискриминантом?

А2 Существует ли полный многочлен с дискриминантом равным 4?

А3 Существует ли приведенный полный многочлен с дискриминантом 5, у которого все корни и коэффициенты являются натуральными числами?

А4 Существует ли полный многочлен десятой степени с нулевым дискриминантом, если все его корни различны?

А5 Существует ли полный многочлен с рациональным дискриминантом и различными иррациональными корнями?

А6 Введём полный многочлен $P(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$. Найдите значение выражения $D(P(x))$.

Б1 Сколько существует пар натуральных чисел $a, b \leq 10$, при которых для полного многочлена $P(x) = \ldots$